Petriho sítě

©Zdeněk Hanzálek
hanzalek@fel.cvut.cz

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická
Katedra řídicí techniky

6. června 2008

Klasická teorie systémů

Veličiny jako je rychlost, zrychlení, napětí, proud, tlak, teplota, průtok jsou charakterizovány spojitým stavem. Trochu nepřesně označujeme podle spojitosti/nespojitosti času

- spojité systémy - Laplaceova transformace
- diskrétní systémy - Z-transformace

Nepřesnost spočívá ve slově *diskrétní*, jelikož stavy těchto systémů jsou spojité a události se dějí v ekvidistantních okamžicích (neboli v diskrétním čase).

Systémy diskrétních událostí - discrete event systems (DES)

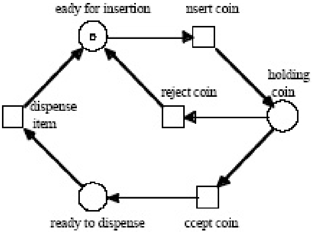
systémy (například počítač, t.j. končný automat; stav v dotazníku svobodná/vdaná/mrtvá; stav těhotenský - jiný stav)

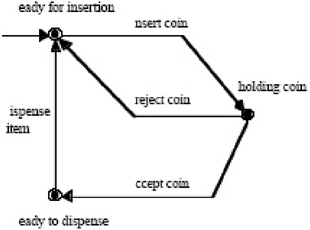
- stavy mají diskrétní charakter
- řízeny diskrétními událostmi ve spojitém čase (příchod zprávy před timeoutem, stisk tlačítka myši při dvojkliku, příchod přerušení,...)

Popis systému diskrétních událostí

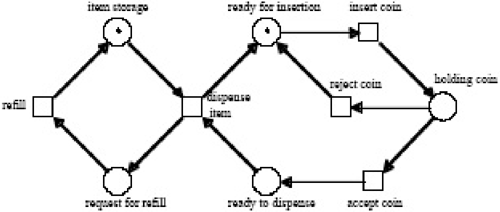
1. pomocí stavových automatů (množina stavů, přechodová funkce a jeden aktuální stav); v případě distribuovaných systémů někdy těžkopádné → product of automata; exponenciální závislost na počtu podsystémů
2. pomocí Petriho sítí; C.A.Petri 1962; analýzu vlastností Petriho sítě lze v některých případech provést bez vyčíslení grafu dosažitelných značení

Vending machine - by Jorg Desel

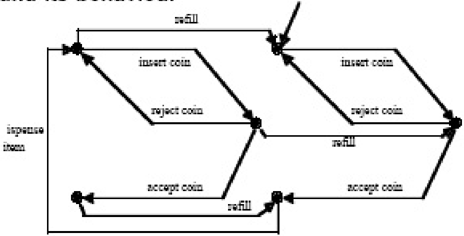




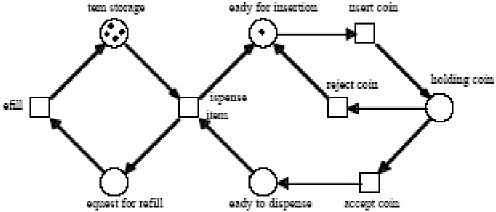
Vending machine with capacity 1 - by Jorg Desel



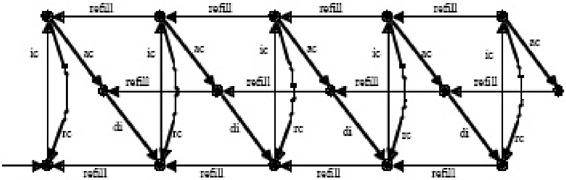
.. and its behaviour



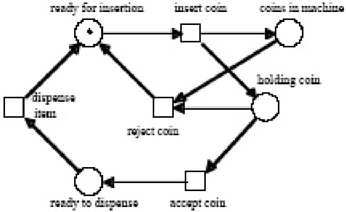
Vending machine with capacity 4 - by Jorg Desel



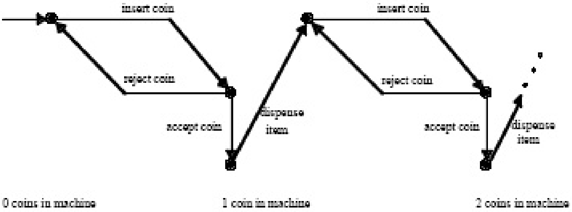
.. and its behaviour



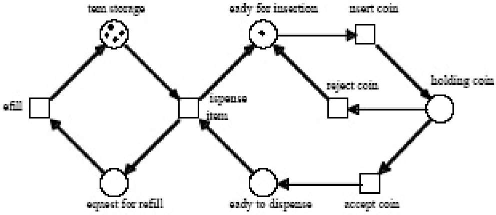
Vending machine - adding unbounded counters - by Jorg Desel



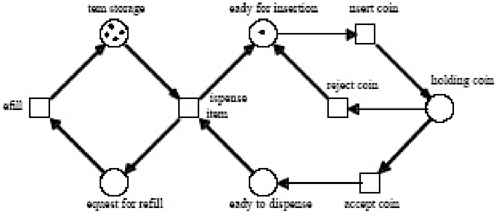
... and its behaviour



Vending machine - adding arc weights (selling pairs or storing pairs) - by Jorg Desel



... or storing pairs



Neoznačená Petriho síť

uspořádaná čtveřice $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ kde:

- $\mathcal{P}$ je konečná množina míst (place), neboli $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\}$
- $\mathcal{T}$ je konečná množina přechodů (transitions), neboli $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n\}$
- Pre je matice zobrazení $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Z}_0^+$ reprezentující spojení přechodu s předchozím místem (precondition)
- $Post$ je matice zobrazení $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Z}_0^+$ reprezentující spojení přechodu s následujícím místem (postcondition)

často používáme incidenční matici $W = Post - Pre$, ta však neumožňuje reprezentovat "self-loop"

Další značení

Množina ${}^{\circ}t_j$ zahrnuje místa vstupující do přechodu t_j.

- $p_i \in {}^{\circ}t_j \Leftrightarrow Pre(p_i, t_j) \neq 0$

Množina t_j° zahrnuje místa vystupující z přechodu t_j.

- $p_i \in t_j^{\circ} \Leftrightarrow Post(p_i, t_j) \neq 0$

Množina ${}^{\circ}p_i$ zahrnuje přechody vstupující do místa p_i.

- $t_j \in {}^{\circ}p_i \Leftrightarrow Post(p_i, t_j) \neq 0$

Množina p_i° zahrnuje přechody vystupující z místa p_i.

- $t_j \in p_i^{\circ} \Leftrightarrow Pre(p_i, t_j) \neq 0$

Označená Petriho síť

uspořádaná pětice $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post, m_0)$ kde

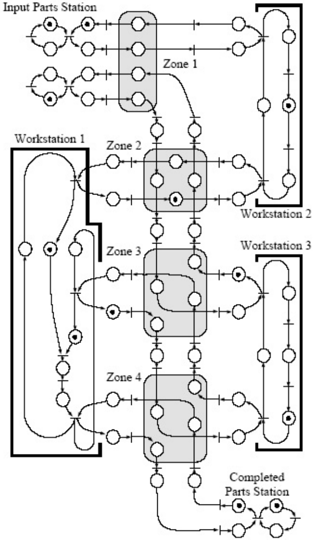
- m_0 je vektor zobrazení $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}_0^+$ reprezentující počáteční značení (initial marking)

Prvek $m_0(p_i)$ reprezentuje počet tokenů (značek, pešků) obsažených v místě p_i na počátku vývoje Petriho sítě.
Vektory $m, m', m_1, m_2, ...$ reprezentují možná značení Petriho sítě v průběhu vývoje systému.

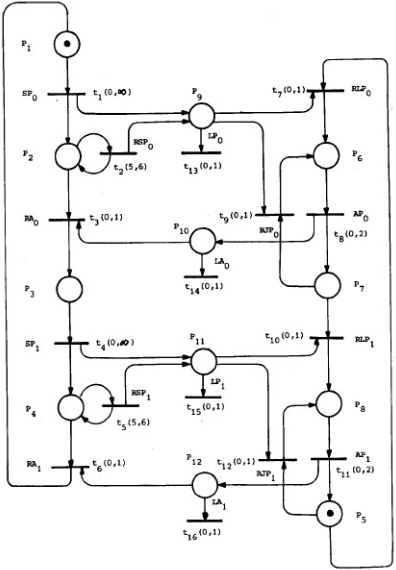
Autonomní a neautonomní Petriho sítě

Autonomní Petriho síť popisuje události v systému z kvalitativního hlediska, ale nekvantifikuje, kdy k nim dojde v návaznosti na okolním prostředí.
Příklad: Autonomous vehicles in production line - Yamalidou
Neautonomní Petriho síť popisuje funkci systému, jehož vývoj je podmíněn externími vstupy (synchronizovaná Petriho síť) nebo časem (časovaná nebo stochastická nebo časová Petriho síť). Příklad: Bit alternating protocol - Barthomieu

Autonomous vehicles in production line - by Katarina Yamalidou



Bit alternating protocol - by Barthomieu



Grafický popis

potřeba reprezentovat jednotlivé podsystémy, mít možnost ověřit jejich funkci (například simulací nebo strukturální analýzou) a možnost spojovat tyto podsystémy
prostředek dorozumívání mezi inženýry
Neoznačená Petriho síť je orientovaný ohodnocený bipartitní graf:

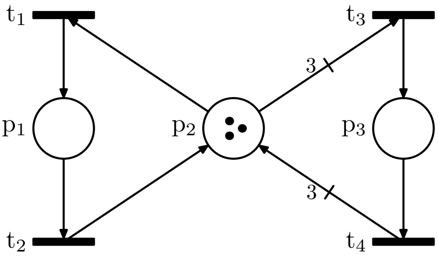
- graf se skládá z uzlů, jež jsou propojeny hranami
- orientovaný značí skutečnost, že hrany grafu jsou orientované
- ohodnocený značí skutečnost, že hranám mohou být přiřazeny váhy
- bipartitní značí skutečnost, že množina uzlů grafu se skládá ze dvou disjunktních podmnožin - množiny míst $\mathcal{P}$ a množiny přechodů $\mathcal{T}$, přičemž místa a přechody se v průběhu cesty střídají

Příklad sdílených zdrojů

například tři komunikační linky, jež jsou sdíleny:

- běžnými uživateli jednotlivě (jeden proces obsadí jednu komunikační linku)
- náročnými uživateli jako trojice (jeden proces obsadí tři komunikační linky)

Zároveň platí, že pokud je zdroj používán, pak nemůže být používán jiným uživatelem



Obrázek: Sdílení zdrojů

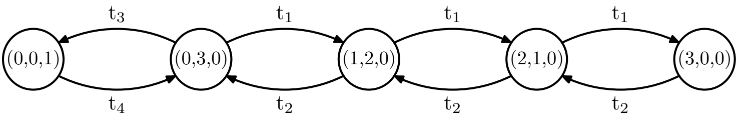
Matematický zápis struktury a značení

$$Pre = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Post = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad m_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vývoj stavu Petriho sítě

- Každé nové značení PS reprezentuje nový stav.
- Graf dosažitelných značení autonomní PS a stavový automat jsou dva ekvivalentní popisy téhož systému diskrétních událostí.



Obrázek: Graf dosažitelných značení Petriho sítě

Uvolnění a přeskok přechodu

Přechod t_j je *uvolněn* při značení m právě tehdy když pro všechna místa p_i vstupující do přechodu t_j platí, že počet tokenů je větší nebo roven váze hrany z p_i do t_j.

- t_j je uvolněn při $m \Leftrightarrow \forall p_i \in {}^\circ t_j \; ; \; m(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$
- lze zapsat jako $\forall p_i \in \mathcal{P} \; ; \; m(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$

Pokud je přechod uvolněn, potom může být přeskočen.

- *Přeskok* (firing, zapálení, provedení) přechodu t_j odejme tokeny z míst vstupujících do přechodu a vloží tokeny do míst vystupujících z přechodu.
- $\forall p_i \in \mathcal{P} \; ; \; m'(p_i) = m(p_i) + Post(p_i, t_j) - Pre(p_i, t_j)$
- $m(p_i)$ je počet tokenů v místě p_i před přeskokem a $m'(p_i)$ je počet tokenů v místě p_i po přeskoku přechodu t_j
- Přeskok je nerozdělitelná akce (pro jednoduchost můžeme předpokládat, že trvá nulovou dobu).

Deterministický a nedetrministický vývoj

V příkladu sdílených zdrojů při počátečním značení může být přeskočen buď t_1 nebo t_3. Například po přeskoku přechodu t_1 je značení:

$$m' = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obecně platí:

- v daném stavu může být uvolněno více přechodů a graf dosažitelných značení pak obsahuje různé cesty V autonomní PS není determinováno, kdy je přechod překočen:
- jakoby přechod byl uvolněn po libovolnou dobu z intervalu $[0, \infty]$ do okamžiku kdy je přeskočen nebo přestane být uvolněn díky přeskoku jiného přechodu

Přeskoková sekvence

Přeskoková sekvence S je sekvence přechodů, jež byly přeskočeny v průběhu vývoje systému
Pro náš příklad sdílených zdrojů uvažme vývoj značení
$m_0 \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_1} m_2 \xrightarrow{t_1} m_3 \xrightarrow{t_2} m_4$.

- Odpovídající přeskoková sekvence: $S = t_1 t_1 t_1 t_2$.
- Říkáme, že přeskoková sekvence S vede na změnu značení z m_0 na m_4 a píšeme $m_0 \xrightarrow{S} m_4$.

Značení m je *dosažitelným značením* právě tehdy když existuje přeskoková sekvence S která vede na změnu značení z m_0 na m.

Stavová rovnice

Charakteristický vektor s udává kolikrát je daný přechod zastoupen v průběhu přeskokové sekvence S.

- přeskokové sekvenci S odpovídá charakteristický vektor $s = [3, 1, 0, 0]^T$

Vývoj Petriho sítě z počátečního značení m_0 do značení m je popsán *stavovou rovnicí*:

$$m = m_0 + (Post - Pre) \cdot s = m_0 + W \cdot s \qquad (1)$$

Konflikt

Konflikt vyjadřuje nedeterminismus chování systému.
PS má *strukturální konflikt* v místě p_i právě tehdy když existují alespoň dva přechody vystupující z tohoto místa.

- $\langle\, p_i, \{t_j, t_k\}\,\rangle$ je strukturální konflikt
  $\Leftrightarrow Pre(p_i, t_j) \cdot Pre(p_i, t_k) \neq 0$

Označená PS má *efektivní konflikt* v místě p_i pro značení m právě tehdy když má strukturální konflikt v místě p_i a $m(p_i)$ nepostačuje pro přeskok všech uvolněných přechodů vystupujících z tohoto místa.

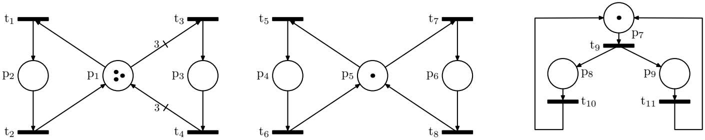
- $\langle\, p_i, \{t_j, t_k\}\,\rangle$ při značení m je efektivní konflikt
  $\Leftrightarrow\ \langle\, p_i, \{t_j, t_k\}\,\rangle$ je strukturální konflikt a t_j je uvolněn a t_k je uvolněn a $m(p_i) < Pre(p_i, t_j) + Pre(p_i, t_k)$

Vlastnosti Petriho sítí a jejich analýza

K čemu je takový model PS vhodný ??
Formální analýza je důležitá pro návrh kritických aplikací, kde se nelze spokojit s pouhým testováním, ale je potřeba podchytit všechny dosažitelné stavy.
Například při návrhu komunikačního protokolu máme možnost prokázat funkčnost a bezchybnost systému ještě před jeho praktickou realizací (musíme však mít model odpovídající realitě).
Vlastnosti, které jsou předmětem naší analýzy:

- závislé na značení - ověřujeme možnost uváznutí, návratu do původního stavu, nadměrného růstu počtu stavů
- strukturální - nazávislé na značení

Vlastnosti závislé na značení - Ohraničenost místa Petriho sítě



Obrázek: Ohraničená, binární a neohraničená Petriho síť

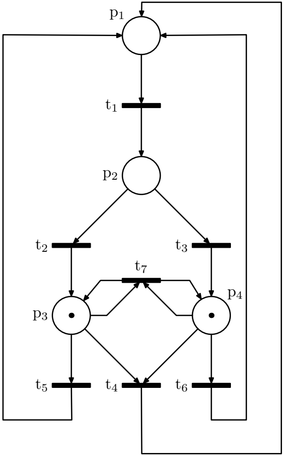
Ohraničená Petriho Síť

Značená Petriho síť je ohraničená (omezená) právě tehdy když pro libovolné dosažitelné značení je počet tokenů v každém místě shora ohraničen konečnou konstantou.

- Petriho síť $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post, m_0)$ je ohraničená $\Leftrightarrow \forall m\ ;\ m_0 \rightarrow m$ a $\forall p_i \in \mathcal{P}\ \exists\ k \neq \infty\ ;\ m(p_i) \leq k$.
- Taková síť se často nazývá k-ohraničená.

Pro každou ohraničenou Petriho síť je množina dosažitelných stavů konečná a lze ji realizovat konečným automatem.
PS je *binární* (binary, safe) právě tehdy když je 1-ohraničená, neboli značení každého místa lze reprezentovat jedním bitem.

Vlastnosti závislé na značení
- Pseudoživost a živost přechodu



Obrázek: Živost Petriho sítě

Pseudoživá Petriho síť

Značená Petriho síť je *pseudoživá*, právě tehdy když každý její přechod může být alespoň jednou přeskočen.

- Petriho síť $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post, m_0)$ je pseudoživá $\Leftrightarrow \forall t_j \in \mathcal{T}$; t_j je pseudoživý.
- Přechod t_j je pseudoživý $\Leftrightarrow \exists\, S$; $m_0 \xrightarrow{S} m$ a $\forall p_i \in {}^{\circ}t_j$; $m(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$.

Živá Petriho síť

Značená Petriho síť je *živá* (live), právě tehdy když pro každé dosažitelné značení a pro každý její přechod existuje přeskoková sekvence, která tento přechod uvolní.

- Petriho síť $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post, m_0)$ je živá $\Leftrightarrow \forall t_j \in \mathcal{T}$; t_j je živý.
- Přechod t_j je živý $\Leftrightarrow \forall\, m$; $m_0 \xrightarrow{S} m \;\exists\, S'$; $m \xrightarrow{S'} m'$ a $\forall\, p_i \in {}^{\circ}t_j$; $m'(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$.

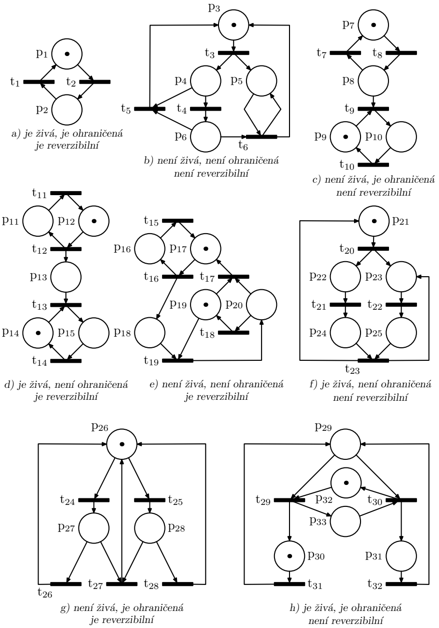
Uváznutím (deadlockem) rozumíme stav systému, kdy žádný z uvažovaných přechodů nemůže být přeskočen. Pokud je Petriho síť živá, pak se nikdy nedostane do deadlocku a ani žádná její část se nikdy nedostane do deadlocku.

Reverzibilní Petriho síť

Značená Petriho síť je reverzibilní (reversible), právě tehdy když pro každé dosažitelné značení existuje přeskoková sekvence, která uvede síť do původního značení.

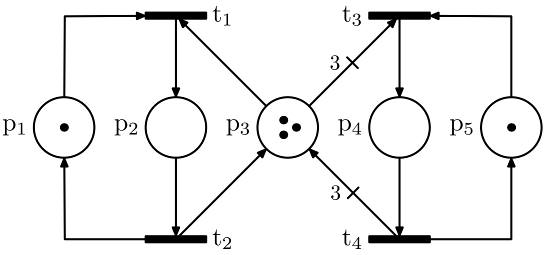
- Petriho síť $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post, m_0)$ je reverzibilní $\Leftrightarrow \forall\, m\, ;\; m_0 \xrightarrow{S} m\; \exists\, S'\, ;\; m \xrightarrow{S'} m_0.$

Žádná z výše zmiňovaných vlastností (ohraničenost, živost a reverzibilita) neimplikuje vlastnost druhou. Jednoduchý důkaz tohoto tvrzení ukázal T.Murata v osmi $(2moznosti^{3vlastnosti})$ Petriho sítích uvedených na následujícícm obrázku.



Obrázek: Kombinace živosti, ohraničenosti a reverzibility

Vlastnosti nezávislé na značení



Obrázek: Petriho síť se třemi minimálními P-invariantami

pro libovolné dosažitelné značení m platí rovnice

$m(p_1) + m(p_2) = m_0(p_1) + m_0(p_2) = 1$

$m(p_4) + m(p_5) = m_0(p_4) + m_0(p_5) = 1$

$m(p_2) + m(p_3) + 3 \cdot m(p_4) = m_0(p_2) + m_0(p_3) + 3 \cdot m_0(p_4) = 3$

poslední rovnice je trochu složitější:

- lineární kombinace značení
- odpovídá uzavřenému orientovanému sledu s opakováním místa p_3

P-invarianta jako charakterisitka konzervativní komponenty

Množina míst se nazývá *konzervativní komponenta* právě tehdy když celočíselná pozitivní lineární kombinace počtu tokenů obsažených v těchto místech je konstantní pro libovolné dosažitelné značení.

- P-invarianta f^T je vektor celých nezáporných čísel charakterizující konzervativní komponentu
- Petriho síť $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, Pre, Post)$ má P-invariantu $f^T; f_i \in \mathcal{Z}_0^+ \; \forall \, i \in \{1 \ldots \|\mathcal{P}\|\}$ právě tehdy když $\forall \, m ; \; m_0 \xrightarrow{S} m \, ; f^T \cdot m = f^T \cdot m_0$

P-invarianta je dána strukturou Petriho sítě

Vektorem f^T vynásobíme zleva stavovou rovnici:

$$f^T \cdot m = f^T \cdot m_0 + f^T \cdot W \cdot s \tag{2}$$

P-invarianta musí splňovat podmínku $f^T \cdot m = f^T \cdot m_0$ pro všechny přeskokové sekvence s

Neboli vektor f^T ; $f_i \in \mathcal{Z}_0^+ \, \forall \, i \in \{1 \dots \|\mathcal{P}\|\}$ je P-invariantou právě tehdy když:

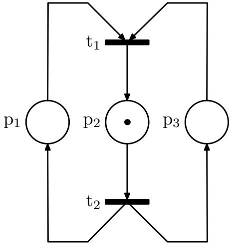
$$f^T \cdot W = 0 \tag{3}$$

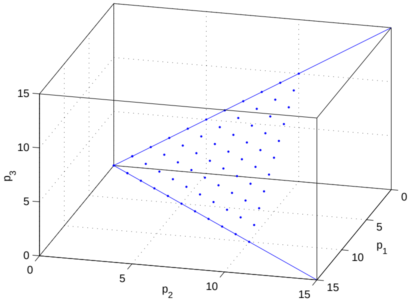
- pro daný vektor f^T jsme schopni ověřit zda jde o P-invarinatu prostým dosazením
- mnohem těžší je nalézt nějakou jednoduchou charakteristiku všech P-invariant Petriho sítě
- každá celočíselná nezáporná lineární kombinace několika P-invariant je opět P-invariantou

P-invarianty tvoří konvexní prostor (pokud upustíme od celočíselnosti)

- Pokud bychom připustili záporné hodnoty proměnných f_i ... soustava rovnic ... řešení tvoří afinní prostor ... dán vektory báze (Gausova eliminační metoda, polynomiální čase). Málo užitečné: nejde o orientovaný sled míst.
- množina je *afinní* právě tehdy když v ní leží celá přímka spojující libovolné dva body této množiny
- množina je *konvexní* právě tehdy když v ní leží celá úsečka spojující libovolné dva body této množiny
- množina $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{R}^n$ je *kužel* právě tehdy když pro libovolný vektor $x \in \mathcal{X}$ a pro libovolný nezáporný skalár λ platí $\lambda x \in \mathcal{X}$.
- V případě množiny P-invariant jde o prostor, který je konvexní kužel (je ekvivalentní klasifikaci "množina $\mathcal{X}$ je uzavřená na nezáporné lineární kombinace").

Příklad Petriho sítě s odpovídajícími P-invariantami tvořícími konvexní kužel

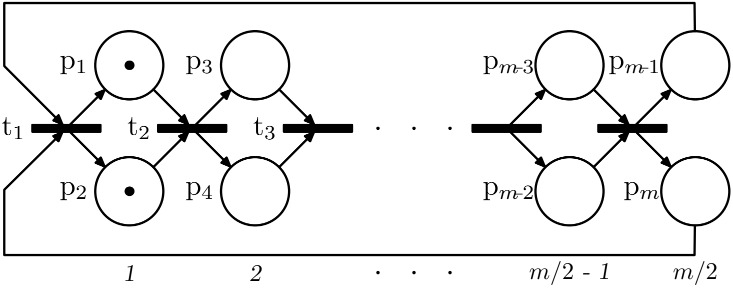




P-invarianty, které jsou na dané hraně nejblíže počátku, se nazývají *minimální P-invarianty* nebo někdy též *generátory* nebo hrany konvexního kuželu.

Neexistuje polynomiální algoritmus pro nalezení množiny minimálních P-invariant

počet minimálních P-invariant není shora omezen nějakou polynomiální funkcí velikosti Petriho sítě



Obrázek: PS s exponenciálním počtem minimálních P-invarinat

nalezneme $2^{m/2}$ různých minimálních P-invariant

Užitečnost P-invarinat pro analýzu vlastností

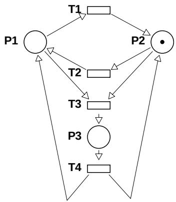
Množina minimálních P-invariant charakterizuje strukturu modelovaného fyzikálního systému.
Například pro PS modelující sdíleneé zdroje je množina minimálních P-invariant

- $(1,1,0,0,0)^T$ reprezentuje předpis pro chování běžného uživatele
- $(0,1,1,3,0)^T$ reprezentuje předpis pro chování sdíleného zdroje
- $(0,0,0,1,1)^T$ reprezentuje předpis pro chování náročného uživatele

Nutná nikoli postačující podmínka pro živost obecné PS

- existence alespoň jednoho tokenu v každé P-invariantě je nutnou podmínkou pro živost sítě bez izolovaných míst
- izolované místo je samo o sobě konzervativní komponentou, ale jeho značení nemá vliv na žádný přechod

Příklad silně souvislé PS, jež není živá, přestože konzervativní komponenta odpovídající jediné minimální P-invariantě obsahuje token:



T-invarianty

Množina přechodů se nazývá *repetitivní komponenta* právě tehdy když existuje přeskoková sekvence z těchto přechodů, která vede na původní značení Petriho sítě.

- T-invarianta s je vektor celých nezáporných čísel charakterizující výše zmíněnou přeskokovou sekvenci.
- s je charakteristickým vektorem přeskokové sekvence S takové, že $\forall\, m_0\,;\; m_0 \xrightarrow{S} m_0$. Jelikož charakteristický vektor udává počty přeskoků přechodů, tak platí: $s_j \in \mathcal{Z}_0^+ \;\forall\, j = 1 \ldots \|\mathcal{T}\|$.
- Při pohledu na stavovou rovnici $m = m_0 + W \cdot s$ snadno nahlédneme, že pokud má pro T-invariantu s platit $m = m_0$ pro libovolné m_0, potom musí platit:

$$W \cdot s = 0 \qquad\qquad s_i \in \mathcal{Z}_0^+ \tag{4}$$

- Algoritmus - transpozice incidenční matice W.

Podtřídy, zkrácené a rozšířené Petriho sítě

Podtřídy Petriho sítí

- mají redukovanou vyjadřovací schopnost
- nemodelovat některé struktury (konflikt, paralelismus)
- vlastnosti lze analyzovat jednoduššími postupy

Zkrácené Petriho sítě

- cílem je zestručnit zápis modelu - dosaženo přidáním nějakého dalšího atributu
- výsledný model je stručnější, ale porozumění tomuto zápisu může být náročnější
- každou zkrácenou PS lze rozepsat na obecnou PS

Rozšířené Petriho sítě

- přidána nějaká pravidla rozšiřující modelovací schopnosti obecné PS
- rozšířenou Petriho síť rozepsat na obecnou PS

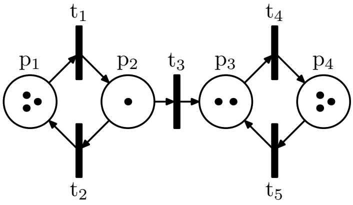
Stavový graf - podtřída PS

Stavový graf (state graph, state machine) je Petriho síť, ve které každý přechod má právě jednu vstupní a jednu výstupní hranu a váhy všech hran jsou rovny 1.

- PS je stavový graf $\Leftrightarrow |{}^{\circ}t_j| = \left|t_j^{\circ}\right| = 1 \; \forall \, t_j \in \mathcal{T}$ a $Pre(p_i, t_j) \in \{0, 1\}$ a $Post(p_i, t_j) \in \{0, 1\} \; \forall \, p_i \in \mathcal{P} \; \forall \, t_j \in \mathcal{T}$
- stavový graf může obsahovat strukturální konflikt, ale neobsahuje strukturální paralelismus, synchronizaci, zdrojový přechod a cílový přechod
- lze si představit jako orientovaný graf ve kterém každý přechod s jeho vstupní a výstupní hranou nahradíme jednou orientovanou hranou a každé místo nahradíme vrcholem grafu s uvedeným značením

Některé vlastnosti stavového grafu

- každý stavový graf je ohraničený
- každá uzavřená orientovaná cesta (neboli neopakuje se v ní vrchol a následkem toho ani hrana) odpovídá minimální T-invariantě
- stavový graf je živý ⇔ je silně souvislý (neboli existuje orientovaná cesta z libovolného vrcholu do libovolného jiného vrcholu) a v počátečním značení je alespoň jeden token



Obrázek: Příklad stavového grafu který není živý, protože není silně souvislý

Značený graf - podtřída PS

Značený graf (marked graph, event graph, graf událostí) je Petriho síť kde každé místo má právě jednu vstupní a jednu výstupní hranu a váhy všech hran jsou rovny 1.

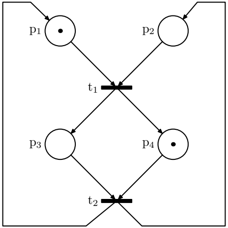
- Petriho síť je značený graf $\Leftrightarrow |{}^{\circ}p_i| = |p_i^{\circ}| = 1 \ \forall \, p_i \in \mathcal{P}$ a $Pre(p_i, t_j) \in \{0, 1\}$ a $Post(p_i, t_j) \in \{0, 1\} \ \forall \, p_i \in \mathcal{P} \ \forall \, t_j \in \mathcal{T}$
- může obsahovat strukturální paralelismus, ale neobsahuje strukturální konflikt, spojení, zdrojové místo a cílové místo
- lze si představit jako orientovaný graf ve kterém každé místo s jeho vstupní a výstupní hranou nahradíme jednou orientovanou hranou s uvedeným značením a každý přechod nahradíme vrcholem grafu

Některé vlastnosti značeného grafu

- Každá uzavřená orientovaná cesta (neboli neopakuje se v ní vrchol a následkem toho ani hrana) odpovídá minimální P-invariantě.
- Značený graf je živý $\Leftrightarrow$ každá P-invarianta obsahuje alespoň jeden token. Povšimněme si, že narozdíl od obecné Petriho sítě jde v případě značeného grafu o podmínku nutnou i postačující.
- Z předchozí vlastnosti a skutečnosti, že každá P-invarianta je nezápornou lineární kombinací minimálních P-invariant vyplývá: Značený graf je živý $\Leftrightarrow$ každá minimální P-invarianta obsahuje alespoň jeden token.

Dva postupy jak dokázat živost značeného grafu

1. Nalezneme množinu minimálních P-invariant a zjišťujeme zda každá obsahuje alespoň jeden token...nepolynomiální složitost
2. Ve značeném grafu odstraníme všechna místa, která obsahují alespoň jeden token. V takto redukovaném grafu existuje uzavřená orientovaná cesta právě tehdy když značený graf není živý...polynomiální složitost, jelikož uzavřenou orientovanou cestu v grafu lze nalézt v čase $O(n^3)$ například Floydovým algoritmem.

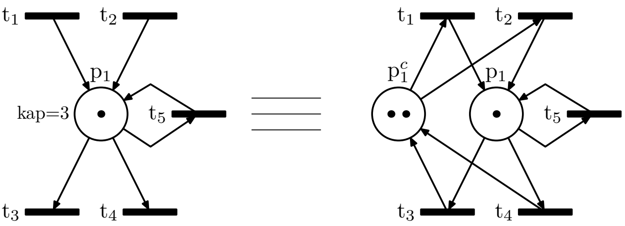


Obrázek: Značený graf, P-invarianta $(0,1,1,0)^T$ neobsahuje token

Kapacitní Petriho síť - typ zkrácené PS

U kapacitní Petriho sítě je místu p_i přiřazena kapacita $k(p_i)$ a přechod před ním není uvolněn v případě, že by se kapacita $k(p_i)$ měla přeskokem tohoto přechodu překročit.

- t_j je uvolněn pro značení $m \Leftrightarrow$
  $\forall p_i \in {}^\circ t_j\ ;\ m(p_i) \geq Pre(p_i, t_j)$ a
  $\forall p_i \in t_j^\circ \cap {}^\circ t_j\ ;\ m(p_i) + Post(p_i, t_j) - Pre(p_i, t_j) \leq k(p_i)$
  a
  $\forall p_i \in t_j^\circ \setminus {}^\circ t_j\ ;\ m(p_i) + Post(p_i, t_j) \leq k(p_i)$

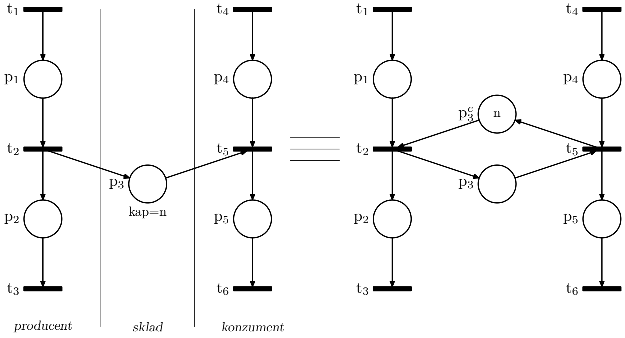


Obrázek: Náhrada kapacitní Petriho sítě pomocí komplementárního místa

Komplementární místo

Komplementární místo p_i^c je spojeno s týmiž přechody jako p_i, ale hrany mají obrácenou orientaci, neboli $Pre(p_i, t_k) = Post(p_i^c, t_k)$ a $Post(p_i, t_l) = Pre(p_i^c, t_l)$.

- Místo p_i a jeho komplementární místo p_i^c dohromady tvoří P-invariantu.
- Počáteční značení komplementárního místa p_i^c je dáno počátečním značením místa p_i a jeho kapacitou neboli $m_0(p_i^c) = k(p_i) - m_0(p_i)$.



Barvené Petriho sítě

Účel barvených PS:

- zestručnit části modelu, které se opakují (obdobně jako když zápisem ve *for* smyčce předejdeme opakovanému zápisu podobných příkazů)

Základní myšlenka:

- přenést informaci ze struktury sítě do očíslovaných tokenů a do funkcí přiřazených k hranám

Barvenou PS lze reprezentovat systémy značné (respektive neurčené) velikosti.

Podobná abstrakce

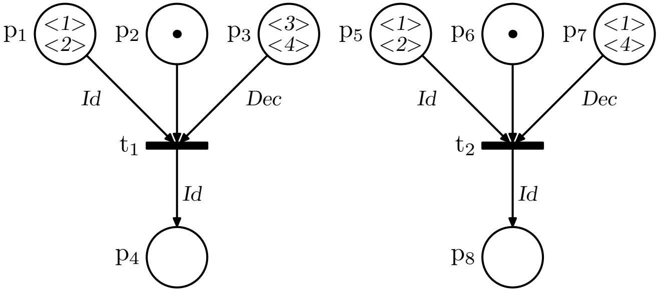
Tři úlohy se stejným kódem spuštěné pod operačním systémem

- Model těchto tří úloh pomocí obecné Petriho sítě lze rozstříhat na tři části
- Ukazateli instrukce v každé z nich lze přiřadit jinou barvu
- Barvená PS vznikne tak, že přeložíme tyto tři strukturálně totožné části přes sebe
- Pokud každá z úloh pracuje nezávisle na ostatních, potom funkce přiřazené hranám barvené Petriho sítě jsou vždy identita (nemění se barva tokenu)
- Pokud mezi sebou úlohy například komunikují, potom funkce přiřazené hranám mění barvy tokenů

Uvolnění přechodu barvené PS

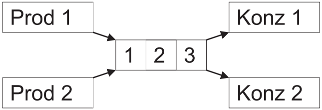
Přechod t_j uvolněn, právě tehdy když v jeho vstupních místech existují takové tokeny, že jejich transformace funkcemi přiřazenými vstupním hranám do t_j je změní na tokeny téže barvy

Potom může být přechod t_j touto barvou přeskočen.



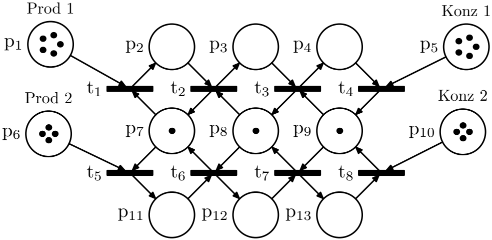
Obrázek: Přechod t_1 je uvolněn barvou 2, přechod t_2 není uvolněn

FIFO fronta pro dva producenty-konzumenty



Obrázek: Producent-konzument s frontou FIFO (případ N=3)

Každý konzument odebírá data (výrobky) pouze od svého producenta.



Obrázek: Příklad: fronta FIFO se třemi pozicemi modelovaná obecnou Petriho sítí

Zápis barvenou Petriho sítí

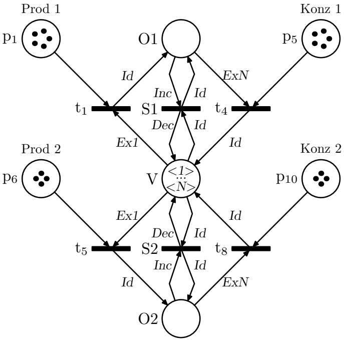
Dané pozici ve frontě přidáme určitou barvu.
Hranám přiřadíme funkce:

- Id (identity) - nemění barvu tokenu
- Ex1 (exclusively 1) - akceptuje pouze token o barvě 1 a nemění jeho barvu
- ExN (exclusively N) - akceptuje pouze token o barvě N a nemění jeho barvu
- Inc (increment) - zvýší barvu tokenu o 1
- Dec (decrement) - sníží barvu tokenu o 1

Vazba na vstup (p_1, p_6) a výstup (p_5, p_{10}) obsahuje nebarvené tokeny.
Nebarvený token je přijímán přechodem bez ohledu na to jakou barvou je přeskakován.

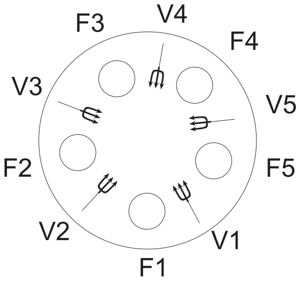
Fronta FIFO s neurčeným počtem pozic modelovaná barvenou Petriho sítí

Vstupně-výstupní přechody jsou uvolňovány pouze vybranými barvenými tokeny (volná první pozice nebo obsazená N-tá pozice).
Přechod $S1$ (respektive $S2$) reprezentuje posun produktu 1 (respektive produktu 2) na následující pozici ve frontě.



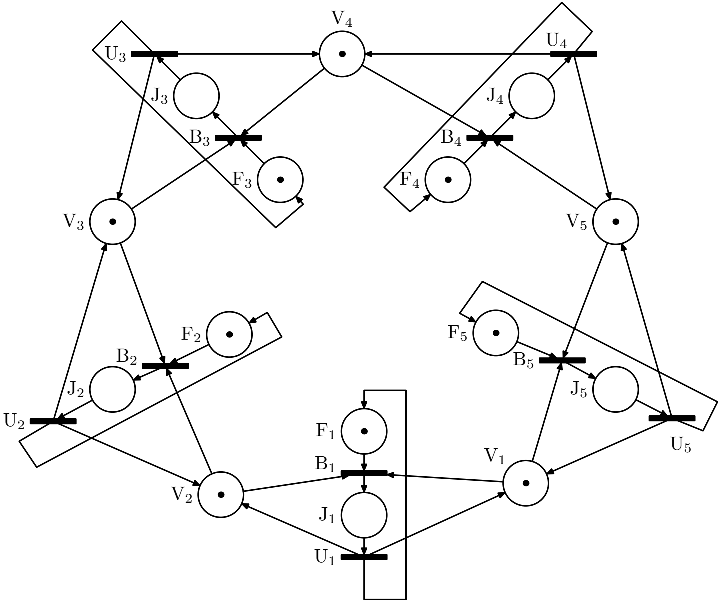
Večeřící filosofové (*dinning philosophers*)

Každý z filosofů potřebuje obě sousední vidličky V k tomu aby mohl jíst.
Filosof se nachází ve dvou možných stavech: jí J filosofuje F
Za tím účelem vidličky bere B a ukládá U.



Obrázek: Pět večeřících filosofů

Obecná Petriho síť pro pět večeřících filosofů



Incidenční matice obecné a barvené PS

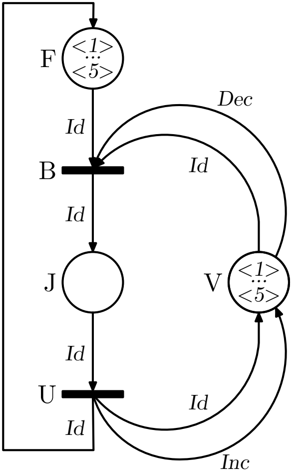
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccc}
-1 & & & & & 1 & & & & \\
 & -1 & & \emptyset & & & 1 & & \emptyset & \\
 & & -1 & & & & & 1 & & \\
 & \emptyset & & -1 & & & \emptyset & & 1 & \\
 & & & & -1 & & & & & 1 \\
1 & & & & & -1 & & & & \\
 & 1 & & \emptyset & & & -1 & & \emptyset & \\
 & & 1 & & & & & -1 & & \\
 & \emptyset & & 1 & & & \emptyset & & -1 & \\
 & & & & 1 & & & & & -1 \\
-1 & & & & -1 & 1 & & & & 1 \\
-1 & -1 & & \emptyset & & 1 & 1 & & \emptyset & \\
 & -1 & -1 & & & & 1 & 1 & & \\
 & \emptyset & -1 & -1 & & & \emptyset & 1 & 1 & \\
 & & & -1 & -1 & & & & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Incidenční matice pro barvenou PS

- Incidenční matici obecné PS lze rozdělit do submatic.
- Pravidelné submatice je potřeba popsat vhodnými funkcemi přiřazenými k hranám. Tímto zavedením vzniká incidenční matice jako matice funkcí:

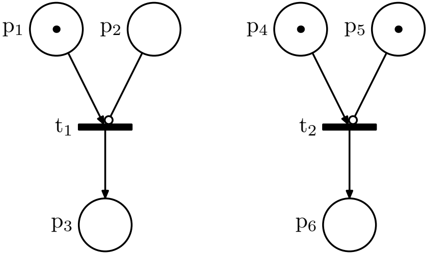
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad B \quad & \quad U \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ J \\ V \end{array} & \begin{bmatrix} -id & id \\ id & -id \\ -(id \wedge dec) & -(id \wedge inc) \end{bmatrix} \end{array}$$

Barvená Petriho síť pro pět večeřících filosofů



PS s inhibitovanou hranou - typ rozšířené PS

Petriho síť s inhibitovanou hranou umožňuje jednoduše modelovat *test na nulu*. Inhibitovaná hrana je specielní typ orientované hrany, která vychází z místa p_i a vstupuje do přechodu t_j. Konec inhibitované hrany je označen malým kroužkem. Prázdnost místa p_i je nezbytnou podmínkou pro uvolnění přechodu t_j.



Obrázek: Přechod t_1 je uvolněn, přechod t_2 není uvolněn

Rozšíření popisu PS

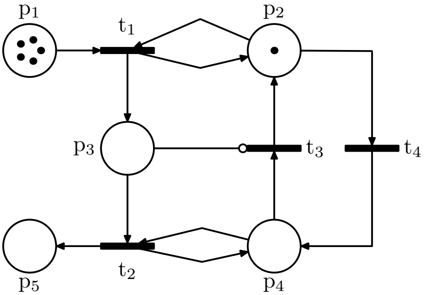
Z formálního hlediska je potřeba rozšířit definiční obor matice *Pre* o specielní prvek indikující skutečnost, že odpovídající hrana je inhibitovaná, neboli *Pre* je matice zobrazení $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{Z}_0^+ \cup \{\oslash\}$.
Přechod t_j je uvolněn $\Leftrightarrow \forall p_i \in \mathcal{P}\ ;\ M(p_i) \geq Pre(i,j)$ pro $Pre(i,j) \in \mathcal{Z}_0^+$ a $M(p_i) = 0$ pro $Pre(i,j) = \oslash$

Systém hromadné obsluhy

Úředník otevře vstupní dveře a vpustí do úřadovny všechny zákazníky, kteří touží po odbavení. Poté vstupní dveře zavře a postupně odbavuje jednotlivé zákazníky. Zákazníci po odbavení odcházejí výstupními dveřmi, jež jsou stále otevřeny. Úředník vstupní dveře otevře až po odbavení všech zákazníků.

p_1 reprezentuje zákazníky před příchodem do úřadovny p_3 zákazníky v úřadovně a místo p_5 zákazníky po odchodu z úřadovny p_2 obsahuje token, když jsou vstupní dveře otevřeny p_4 obsahuje token, když jsou vstupní dveře zavřeny přeskok přechodu t_1 reprezentuje vstup zákazníka, t_2 reprezentuje odchod zákazníka t_3 reprezentuje otevření vstupních dveří t_4 reprezentuje zavření vstupních dveří

Model systému hromadné obsluhy pomocí Petriho sítě s inhibitovanou hranou

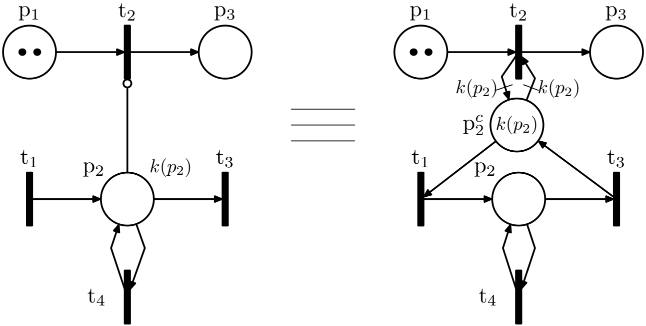


Vlastnosti Petriho sítě s inhibitovanou hranou

nelze je snadno formalizovat za pomoci lineární algebry, jak to bylo možné u obecné Petriho sítě.

Naneštěstí nelze každou Petriho síť s inhibitovanou hranou převést na obecnou Petriho síť.

Na druhou stranu platí následující tvrzení: pokud je Petriho síť s inhibitovanou hranou ohraničená, potom ji lze převést na obecnou Petriho síť.



Obrázek: Náhrada inhibitované hrany v ohraničené Petriho síti